

3. Übung zur Elementaren Stochastik

Prof. Dr. Ehrhard Behrends, WS 2009/10

Ausgabe: 26. 10. 2009

Abgabe: am 3. 11. 2009 bis 16.00 Uhr in den Fächern der Tutoren

Bei einigen Aufgaben gibt es eine *-Version. Die ist für die ambitionierteren Übungsteilnehmer gedacht. Bitte höchstens eine der Aufgaben n und n^* bearbeiten, $n = 1, 2, 3, 4$!

1. Finden Sie eine stetige Dichtefunktion f auf $[2, 4]$ so, dass für das dadurch definierte Wahrscheinlichkeitsmaß gilt:

$$\mathbb{P}([2, 3]) = 0.9, \quad \mathbb{P}([2.5, 3.5]) = 0.9, \quad \mathbb{P}([3.5, 3.8]) = 0.001.$$

1*. Finden Sie eine stetige Dichtefunktion f auf $[0, 1]$ so, dass für das dadurch definierte Wahrscheinlichkeitsmaß gilt: Für $[a, b] \subset [0, 1]$ ist $\mathbb{P}([a, b]) = b^2 - a^2$.

2. Es sei $n \in \mathbb{N}$. Das Intervall $[1, 3]$ sei mit der Dichte $f_n(x) := c_n x^n$ versehen. (c_n ist eine geeignete Konstante.) Schreiben Sie einen Pseudocode für ein Computerprogramm, mit dem unter Verwendung der Gleichverteilung auf $[0, 1]$ Zufallszahlen in $[0, 1]$ entsprechend der Dichte f_n erzeugt werden.

3. Eine fiktive Geschichte: Ein Zeitgenosse von Buffon hat keine Stöckchen zur Hand, er wirft kreisrunde Bierdeckel auf den Dielenfußboden. (Dielenbreite d , Bierdeckeldurchmesser b , wobei $b < d$.) Prüfen Sie, ob man – wie Buffon mit seinen Stöckchen – aus der Wahrscheinlichkeit, dass der Bierdeckel eine Kante trifft, auch die Zahl π bestimmen kann und wenn ja, mit welcher Formel.

3*. Eine fiktive Geschichte: Ein Zeitgenosse von Buffon hat keine Stöckchen zur Hand, er wirft quadratische Bierdeckel auf den Dielenfußboden. (Dielenbreite d , Bierdeckelseitenkante b , wobei $\sqrt{2}b < d$.) Prüfen Sie, ob man – wie Buffon mit seinen Stöckchen – aus der Wahrscheinlichkeit, dass der Bierdeckel eine Kante trifft, auch die Zahl π bestimmen kann und wenn ja, mit welcher Formel.

4. Das Intervall $[0, 1]$ sei mit der Gleichverteilung versehen. Wir betrachten die durch $X(x) := x^5 + 2$ auf $[0, 1]$ definierte Zufallsvariable. Bestimmen Sie eine Dichtefunktion für $\mathbb{P}_X$ auf $[2, 3]$. Erläutern Sie auch in Worten, warum das Ergebnis qualitativ plausibel ist.

4*. Das Intervall $[0, 1]$ sei mit der Gleichverteilung versehen. Es sei $X : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ eine streng monoton steigende Zufallsvariable, von der man nur weiß, dass $\mathbb{P}_X$ die Dichtefunktion $2x$ hat. Bestimmen Sie X .

Homepage der Veranstaltung: page.mi.fu-berlin.de/behrends/stochastik2009

Bitte Rückseite beachten.

Für den mathematischen „Arbeitsspeicher“ ...

Auf die folgenden Fragen sollte man jederzeit eine richtige Antwort geben können.

Was ist eine σ -Algebra? Wie ist die σ -Algebra der Borelmengen definiert? Was ist ein Wahrscheinlichkeitsraum? Wie kann man einen Wahrscheinlichkeitsraum einfach definieren, wenn Ω höchstens abzählbar ist? Was versteht man unter a) der Gleichverteilung auf $\{1, \dots, n\}$, b) einem Laplaceraum, c) der Bernoulliverteilung, e) der Poissonverteilung, f) der geometrischen Verteilung? Wie kann man auf einem Intervall, versehen mit der σ -Algebra der Borelmengen, einen Wahrscheinlichkeitsraum mit Hilfe einer Dichtefunktion definieren? Was versteht man unter a) Gleichverteilung, b) Exponentialverteilung, c) Normalverteilung? **Neu:** Was wird mit dem Buffonschen Nadelexperiment approximativ berechnet? Was ist eine Zufallsvariable? Wie ist der durch eine Zufallsvariable induzierte Wahrscheinlichkeitsraum definiert?

... und hier noch Beispiele aus den „Arbeitsspeichern“ anderer Teilbereiche der Mathematik:

Ist $\mathcal{E}$ ein Mengensystem, d.h. eine Teilmenge der Potenzmenge einer Menge M , wie ist dann $\bigcup_{E \in \mathcal{E}} E$ definiert? Und wie $\bigcap_{E \in \mathcal{E}} E$? Was ist eine offene, was eine abgeschlossene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$? Was besagt der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung? Was ist eine stetige Funktion? **Neu:** Was versteht man unter dem Zwischenwertsatz? Was ist $f^{-1}(A)$, wie ist die inverse Abbildung f^{-1} definiert (falls sie existiert)?

Stochastik am Computer: Anregungen

Viele Definitionen, Ergebnisse und Verfahren sind besser zu verstehen, wenn man zur Illustration Computersimulationen zur Verfügung hat. Es wird empfohlen, sich solche Simulationen selbst zu schreiben, viele Routinen findet man schon vorgefertigt in den meisten Programmpaketen.

Unterprogramme: Zufallszahlen erzeugen können (Laplace, Binomial, Poisson, geometrisch, Exponentialverteilung, Normalverteilung, ...); Häufigkeitsverteilungen skizzieren können (so genannte Histogramme).

Projekte: Test des Zufallszahlengenerators (etwa einige Millionen gleichverteilte Zufallszahlen in $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ erzeugen und prüfen, ob alle Ergebnisse in etwa gleich oft vorkommen); einige Millionen Poissonverteilte Zufallszahlen erzeugen und ein Histogramm erstellen, ...